CASIO nytt
NR. 2 - 2012
18. årgang

Arena for skandinaviske realfaglærere

Provuppgifter i Norge för programmen 2P och 2P-Y våren 2012

Av: Bjørn Bjørneng och Tor Andersen

Nationella matematikprovet våren 2012 blev en katastrof för många elever som skrev provet för 2P eller 2P-Y. Hela 39,1 % underkändes i 2P-Y och 22,4 % underkändes i 2P.

Casionytt presenterar här lösningsförslag till två av uppgifterna som var med i både proven för 2P och 2P-Y. Båda uppgifterna är från del 2 och inbjuder till användning av digitala verktyg. Elever som inte använder sig av räknare eller dator, riskerar att inte ha tillräckligt med tid för att kunna lösa uppgifterna.

Lösningsförslagen är gjorda med en Casio fx-CG20.

Workshops för lärare i Kambodja.

Jakten på primtal och primtalsfaktorer med hjälp av fx-CG20.

av: Bjørn Bjørneng

Bråk dividerat med bråk

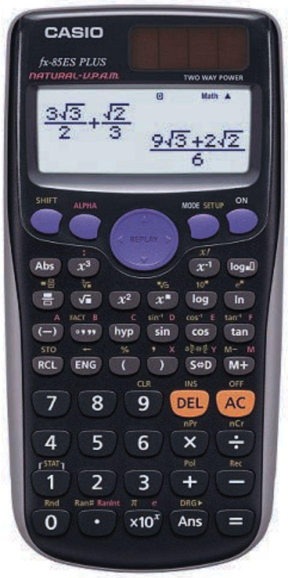
av: Tor Andersen

Vi uppmanar våra läsare att skicka in undervisningsupplägg som gör att elever bättre kan förstå ”bråk dividerat med bråk”.

Har du ett bra förslag?

Insändare är med i en utlottning av en Casioklocka!

Workshops för lärare i Kambodja



Organisationen Teachers Across Boarders, bestående av aktiva lärare från USA och Sverige, har under flera år kommit tillbaka till Siem Reap i Kambodja för att där hålla fortbildning i form av workshops för lärare. Tjugo kambodjanska matematiklärare deltog i vår workshop om matematisk problemlösning. Tack vare sponsring från CASIO hade vi förmånen att kunna arbeta med räknaren fx-85ES PLUS.

Vår workshop kretsade kring rika matematiska problem. Vår tanke var att arbeta med problem som kan förstås och lösas från en mellanstadienivå och utvecklas och fördjupas för att arbetas med upp till gymnasienivå. En viktig komponent i de problem vi arbetade med var att påvisa möjligheterna att arbeta med olika matematiska metoder för att lösa samma problem.

I ett av problemen var frågan: ”Hur många turer måste en båt åka, när 7 vuxna och 2 barn skall korsa en flod - om båten som mest kan ta 1 vuxen eller 2 barn per tur?”

I ett första konkret angrepssätt fick nio deltagare spela upp förloppet med hjälp av en väska som båt och en pekpinne som flod. Övriga fick hjälpa till att lösa problemet och tillsammans räkna antalet turer. I nästa skede ökades abstraktionen och personerna ersattes med tandpetare. Nu undersöktes även antalet turer med 5, 6, och 8 vuxna. Med hjälp av en tabell upptäckste ett mönster. När mönstret upptäckts kunde nu deltagarna logiskt resonera sig fram till hur många turer som behövs för att förflytta 52 vuxna. En formel kunde identifieras och vi förde en diskussion om vad variabel, konstant och koefficient representerar. Med hjälp av formeln kunde vi använda miniräknarens funktionsalgoritm för att skapa en värdetabell för hur många turer som krävs för olika antal vuxna. Värdetabellen användes sedan för en grafisk representation och vi kunde föra en ny diskussion om vad som representeras i grafen. Sedan frågade vi oss vad som händer om någon av förutsättningarna ändras. En grupp ställde sig frågan ”Vad händer om båten kan ta tre barn istället?”.
Exemplet visar hur olika angreppssätt kan användas för att arbeta med, förstå och lösa rika problem. För vår kambodjanska grupp presenterade vi olika angrepssätt med hjälp av en sexfältare bestående av: konkreta, logiska, aritmetiska, geometriska, algebraiska och grafiska metoder.

På liknande sätt arbetade vi med att låta problemen utvecklas och fördjupas. För de kambodjanska lärarna var det ett nytt sätt att arbeta. De är vana vid att läraren förmedlar det effektivaste och snabbaste sättet att lösa ett givet problem. Att eleverna själva upptäcker, samarbetar och frågar var nog ganska ovanligt. Och när vi tänker på det, är det allt för ovanligt även i vår egen undervisning. Men det ska det nu bli ändring på.

Petter Norrthon, Lärare i matematik och fysik Åva gymnasium, Täby och
Pia Norrthon lärare i matematik och NO, Vasaskolan Danderyd

Provuppgifter för programmen 2P och 2P-Y i Norge våren 2012

Av: Bjørn Bjørneng och Tor Andersen

Nationella matematikprovet våren 2012 blev en katastrof för många elever som skrev provet för 2P eller 2P-Y. Hela 39,1 % underkändes i 2P-Y och 22,4 % underkändes i 2P.
Casionytt presenterar här lösningsförslag till två uppgifter som var med i både proven för 2P och 2P-Y. Båda uppgifterna är från del 2 och inbjuder till användning av digitala verktyg. Elever som inte använder sig av räknare eller dator, riskerar att inte ha tillräckligt med tid för att lösa uppgifterna.
Lösningsförslagen är gjorda med en Casio fx-CG20.
Uppgifterna är på norska

Oppgave 5 (6 poeng)

En dag gjorde klasse 1A et forsøk i naturfagtimen. Seks elever slapp hver sin stålkule fra 1 m høyde og målte tiden det tok før kulen traff bakken.
Resultatene ser du i tabellen nedenfor.

Elev	1	2	3	4	5	6
Tid (sekunder)	0,46	0,45	0,47	0,44	0,52	0,46

a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for måleresultatene.

Klassen la merke til at elev nummer 5 målte en større falltid enn de andre. Mange mente at dette resultatet måtte skyldes målefeil, og at det derfor burde forkastes.

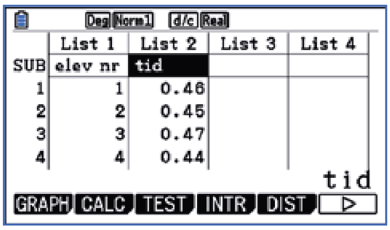
Da ga fysikklærer Strøm dem denne regelen:

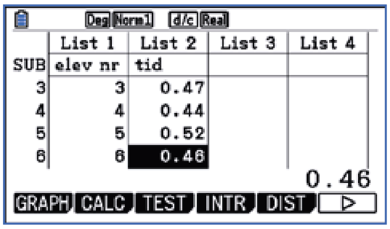
«Når vi har seks målinger, kan vi forkaste et måleresultat dersom det ligger mer enn 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet.»

b) Finn ut om måleresultatet til elev nummer 5 kan forkastes dersom vi bruker regelen ovenfor.

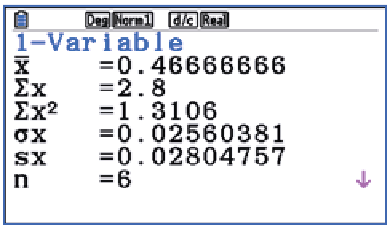
c) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for de fem andre måleresultatene.

Lösningsförslag med hjälp av grafräknaren fx-CG 20
Värdena läggs in i statistikprogrammets listor.

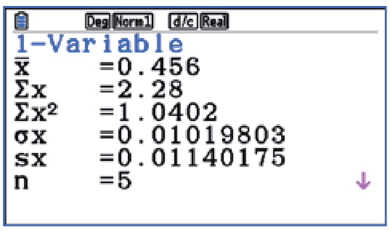




Därefter väljer vi CALC och kontrollerar SET



a) Medelvärdet är 0,47 s och standardavvikelsen 0,026 s
b) Krav på att förkasta ett resultat : mätning större än (0,47 + 1,4 x 0,026) s = 0.51 s
eller mindre än(0,47 – 1,4 x 0,026) s = 0,43 s
c) Mätresultatet för elev nr 5 förkastas och vi får följande när vi trycker CALC.



Det nya medelvärdet blir 0,46 s med standardavvikelsen 0,010 s. Medelvärdet anges med 2 decimaler i överenstämmelse med mätningarna och standardavvikelsen med 3.
Att genomföra den här uppgiften utan digitala verktyg är mycket arbetskrävande, för att inte säga omöjlig. Den här uppgiften kan lösas med alla Casios grafräknare.

Matematikprov Vg 2P våren 2012

Oppgave 6 (8 poeng)

Tabellen nedenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år.

Årstall	1927	1961	1974	1987	1999	2011
Folketall (milliarder)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La x være antall år etter 1900 (i 1900 er $x = 0$, i 1901 er $x = 1$, og så videre).

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 1{,}27 \cdot 1{,}016^x$ kan brukes som modell for å beskrive hvordan folketallet i verden har endret seg i årene 1927–2011.

b) Hvor mange prosent øker folketallet med per år ifølge modellen i a)?

c) Når var folketallet 4,6 milliarder ifølge modellen i a)?

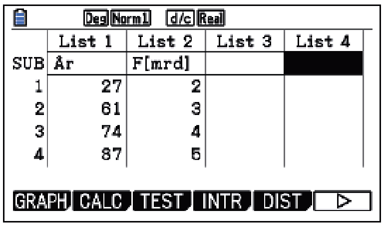
d) Hvor lang tid går det ifølge modellen i a) mellom hver gang folketallet fordobles? Hvordan stemmer dette med tallene i tabellen ovenfor?

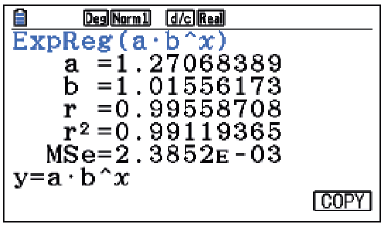
FN har utarbeidet prognoser som sier at folketallet i verden skal passere 8 milliarder i 2025 og 9 milliarder i 2045.

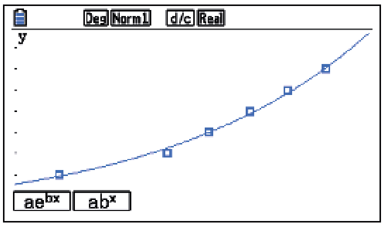
e) Vurder om modellen i a) passer med disse prognosene.

Förslag til lösning.

a) Vi använder regression på en grafräknare. Här har vi använt Casio fx-CG 20.





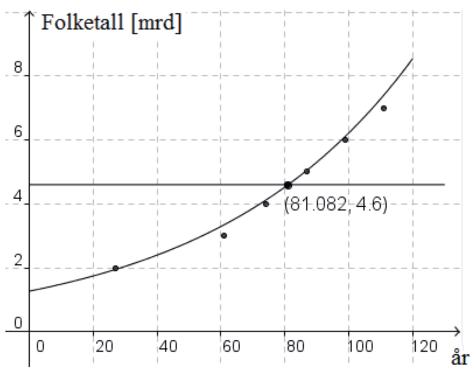


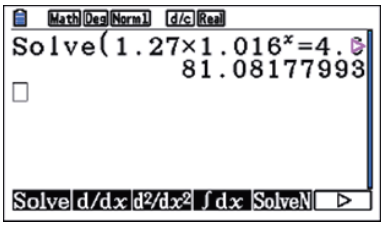
Genom att använda ExpReg ser vi att funktionen f

$f(x) = 1{,}27 \cdot 1{,}016^x$ kan användas som modell för att beskriva hur befolkningen i världen ökat under åren 1927 – 2011.

b) Tillväxtfaktorn är $1{,}016$ Det betyder att den procentuella ökningen per år är 1,6 %.

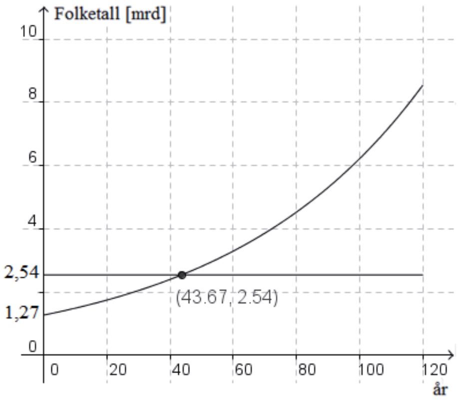
c) Skärningspunkten mellan grafen till f $1{,}27 \cdot 1{,}016^x = 4{,}6$ och y = 4,6 är (81, 4,6). Det betyder att befolkningen var 4,6 miljarder år 1981. Vi kan även lösa ekvationen med hjälp av ”Solve” på räknaren. Där får vi bekräftat att befolkningen var 4,6 miljarder 1981.

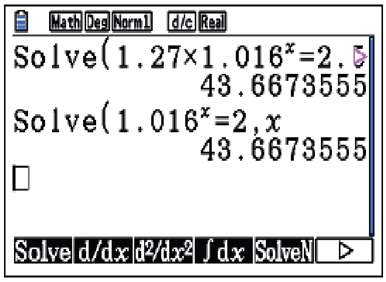




d) I följande modell fördubblas befolkningen när den har vuxit från 1,27 miljarder till 2,54 miljarder. Vi ritar grafen till y = 2,54 och hittar skärningspunkten mellan graferna. Skärningspunktens x-värde är ungefär lika med 44. Det betyder att, enligt modellen, går det 44 år mellan varje gång befolkningen fördubblas.

Vi kan också lösa ekvationen $1{,}27 \cdot 1{,}016^x = 2{,}54$ med hjälp av ”Solve” på räknaren.





Enligt tabellen tar det (1974 – 1927 = 47) 47 år och (1999 – 1961 = 38) 38 år för en fördubbling av befolkningen. Medelvärder av 47 år och 38 år är 42,5 år. Modellen och tabellen överensstämmer bra.

e) Enligt modellen är befolkningen 2025 $f(125) = 1{,}27 \cdot 1{,}016^{125} = 9{,}24$ dvs 9,24 miljarder

Enligt modellen är befolkningen 2045 $f(145) = 1{,}27 \cdot 1{,}016^{145} = 12{,}69$ dvs 12,69 miljarder

Enligt modellen kommer befolkningen att öka snabbare än vad FN har beräknat. Modellens tillväxtfaktor verkar ha alltför stort värde för x-värden större än 115.

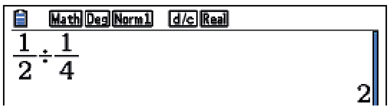
Bråk dividerat med bråk

av: Tor Andersen

Många elever har lärt sig att dividera bråk med bråk genom följande regel: *Vi dividerar ett bråk med ett bråk genom ersätta divisonstecknet med multiplikationstecknet och invertera nämnaren.*

Elever får uppgifter av typen: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ Disciplinerade elever löser uppgiften så här: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$

En del elever använder räknaren och får:



Men vad går räkneövningen egentligen ut på? Vad betyder svaret? Finns det något värde att dela ett bråk med ett bråk utan att kommentera svaret? Har eleverna en bild av vad som händer? Ett halvt äpple delat med en fjärdedel är onekligen lite konstigt. Men om man ser övningen ur ett mer verkligt perspektiv, till exempel om man ska fördela en halv liter öl på *x* antal glas som rymmer en kvarts liter vardera. Det låter mer logiskt. De flesta människor inser att vi behöver två glas.
Alltså:

$$\frac{1}{2}\,liter\ öl : \frac{1}{4}\ \text{liter glas} = 2\ \text{stycken} \frac{1}{4}\ \text{liter glas med öl}$$

Med ord: En halv liter öl fördelat på glas som rymmer en kvarts liter ger två glas med öl.
Det går lika bra med mjölk.

Vi uppmanar våra läsare att skicka in undervisningsupplägg som gör att elever bättre kan förstå ”bråk dividerat med bråk”.

Har du ett bra förslag?

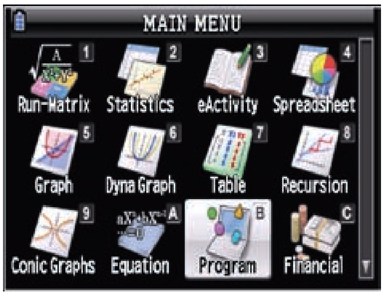
Skicka ditt förslag till: kjell.skajaa@casio.no

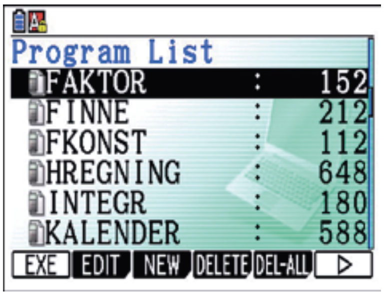
Insändare är med i en utlottning av en Casioklocka!

Jakten på primtal och primtalsfaktorer med hjälp av fx-CG20.

Casios grafräknare har i alla år haft menyvalet PROGRAM. Detta är ett menyval jag dessvärre tror att få använder. På 90-talet hade jag några ivriga elever som gjorde riktigt bra program som de stolt visade mig vilket gjorde att jag fick upp ögonen för detta menyval**.** Sedan har vi på Dokka vgs. gjort många små och stora program till glädje för både elever och lärare. Från Sverige där eleverna får lära sig mer om programmering har vi fått följande utmaning:

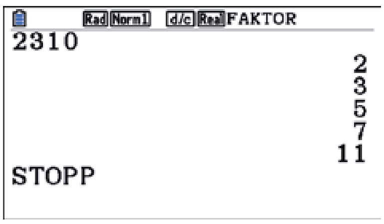
Gör ett program som hittar alla primtal mellan en nedre gräns A och en övre gräns B. Programmet ska även räkna antalet primtal och antalet primtalstvillingar mellan A och B.
Ett primtal är bara delbart med sig själv och 1, och primtalstvillingar är två på varandra följande primtal med differensen 2, t ex. 11 och 13. Som inledning gör vi ett program som bestämmer alla primtalsfaktorer inom ett givet intervall. Här är en utskrift av programmet och lite om hur vi kan hitta detta på räknaren.

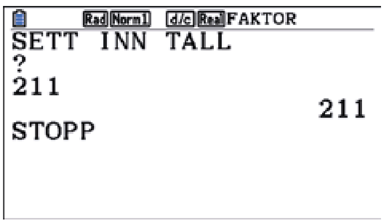




Välj F3 NEW för att skriva in programmet . Därefter får programmet sin plats i listan över alla programmen.

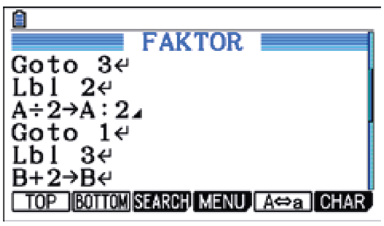
```
Filename:FAKTOR
"Sett inn tall":?→A↲
Lbl 1↲
A÷2→B↲
Int B=B⇒Goto 2↲
1→B↲
Goto 3↲
Lbl 2↲
A÷2→A:2◢
Goto 1↲
Lbl 3:B+2→B↲
B>A⇒Goto 6↲
Lbl 4↲
A÷B→C:Int C=C⇒Goto 5↲
Goto 3↲
Lbl 5↲
A÷B→A:B◢
Goto 4↲
Lbl 6↲
"STOPP"
```





Programmet består av slingor som först kontrollerar om talet är delbart med 2 och därefter med 3, 5,7,9.. dvs alla udda tal större än eller lika med 3. Detta går rätt snabbt.
Menyvalet JUMP ger följande underval:
Lbl med efterföljande tal anger början av en slinga. Goto med efterföljande tal gör att du hoppar till starten av en slinga.
Varje gång vi hittar en primtalsfaktor B byts A med A:B genom kommandot A →A:B. Programmet avslutas när B>A.

När vi kör programmet får vi först en uppmaning om att skriva in ett tal t.ex 2310. Genom upprepade EXE… får vi primtalsfaktorerna : 2,3,5,7 och 11.
Väljer vi talet 211 får vi bara faktorn 211 vilket betyder att 211 är ett primtal.



På linje 3 byts A med A:2 och den lilla trekanten gör att A visas på displayen innan du fortsätter.

```
Filename:PRIMTALL
"NEDRE GRENSE":?→A↲
"OVRE GRENSE":?→B↲
0→N↲
0→T↲
Lbl 0↲
1→C↲
Lbl 1↲
2+C→C↲
C>√A⇒Goto 3↲
A÷C=Int (A÷C)⇒Goto 2↲
Goto 1↲
Lbl 2↲
A+2→A↲
Goto 0↲
Lbl 3↲
A>B⇒Goto 4↲
A◢
A=D+2⇒T+1→T↲
A→D↲
A+2→A↲
N+1→N↲
Goto 0↲
Lbl 4↲
"ANTALL PRIMTALL":N◢
"ANTALL TVILLINGER":T◢
"STOPP"
```

Så till utmaningen från Sverige med vårt förslag till lösning. Programmet PRIMTALL hittar alla primtal mellan en nedre gräns A och en övre gräns B . Observera att A måste vara ett udda tal större än eller lika med 3 och det är bra om även B är det.
När du kör programmet kommer primtalen ut på skärmen när du trycker EXE.

?->A är ett input-kommando som sätter nedre den gränsen till A, A är ett udda tal större än 2. Övre gränsen blir B som är större än A. Vidare i programmet är N och T variabler som räknar upp antal primtal och primtalstvillingar. Slingan 0 ger ett startvärde för en eventuell faktor C och i slinga 1 får C värdena 3,5 7 osv. För varje C mindre än √A kontrollerar vi om C är en faktor i A. Vi går till slinga 3 när C>√A. Då är A ett primtal och A skrivs ut, N ökar med 1 och T ökar eventuellt med 1. Om A:C går upp, hoppar vi till slinga 2 och testar nästa A tills A blir större än övre gränsen B.

Kommandot A:C=Int(A:C) =>Goto 2 kontrollerar om C är en faktor. I sådana fall går vi till slinga 2 och om inte, går vi vidare i programmet.

Några utmaningar:
Bestäm antal primtal och primtalstvillingar mellan 3 och 100, mellan 1003 och 1100 och mellan 10003 och 10100 ….. Vad ser du ?
Matematikerna har ännu inte klarat att bevisa om det finns ett oändligt antal primtalstvillingar eller inte.
Euklides har på ett elegant sätt bevisat att finns ett oändligt antal primtal.

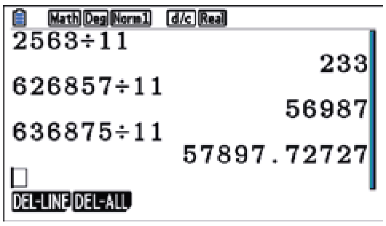
Du kommer att uppskatta att testa programmen. Hilsen Bjørn

JAKTEN PÅ PRIMTAL:

När en gammal matematiklärare inte kan sova tänker han på sin gamle lärare Strand som förklarade när ett tal är delbart med: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 och 10.
Kan vi hitta en regel för tal som delbara med 11? När vi undersöker tal nära 10, 100, 1000 osv ser vi att följande tal är delbara med 11:
11= 10+1 , 99 = 100-1, 1001 = 1000+1, 9999 = 10000-1 , 100001 = 100000+1 osv. Det är +1 och – 1 varannan gång.
.
Vi har ett tal ………edcba = a + b(11-1) + c(99+1) + d(1001-1) + e(9999+1) +……….. =
a-b+c-d+e-…….+ ett tal delbart med 11.

Ett tal …………fedcba är delbart med 11 om a-b+c-d+e-f osv är delbart med 11
Vi provar: Är 2563 delbart med 11? 3-6+5-2 = 0 ; Eventuellt 2-5+6-3 = 0 ; talet är delbart med 11.

Kontrollera regeln för dessa beräkningar :



Det händer att jag besöker elever i årskurs 6 och berättar om primtal. Efter en kort inledning om delbarhet får de som uppgift att bestämma primtal under 100 och eventuellt under 200. Det är fantastiskt att se hur de tar sig an utmaningen och inte minst diskussionen som pågår i klassrummet .

Apropå!

I tidigare nummer av Casionytt har vi skrivit om talet e. Här kommer en liten uppföljning.
När vi skriver ut ett irrationellt tal e och ett rationellt tal 200/119 med till exempel 200 decimaler ser vi snabbt skillnaderna.

e.200;
2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190

Bortsett från att 1828 kommer två gånger är det ingen upprepning, det är omöjligt att förutsäga decimal 201 och 202 efter kommatecknet.

200/119,200;

1.680672268907563025210084033613445378151260504201680672268907563025210084033613445378151260504201680672268907563025210084033613445378151260504201680672268907563025210084033613445378151260504201680672

Här hittar vi en period 680672268907563025210084033613445378151260504201 som upprepas så att decmial 201 är 2 och 202 är 6 osv

KURSPAKKER!

Vi tar imot utfordringer........

Casio Scandinavia AS
Hillerenveien 82
5174 Mathopen

Tlf: +47 55 19 79 90
Fax: +47 55 19 79 91
Mob: +47 992 12 396

E-post: kjell.skajaa@casio.no

Casio Scandinavia AS
Heliosgatan 26
SE-120 30 Stockholm

Tel: +46-08-442 70 20
Fax: +46-08-442 70 30
Mob: +46 (0)727 41 30 53

E-post: viweka.palm@casio.se

Povl Klitgaard & Co Aps
Laurentsvej 21
DK-2880 Bagsværd
Danmark

Telefon: 4444 0885
Fax: 4449 0185

E-post: service@p-klitgard.dk

Casio Scandinavia AS

ISSN: 1890-3339

Casionytt blir utgitt av:

Casio Scandinavia AS
Hillerenveien 82
5174 Mathopen

Tlf. +47 55 19 79 90
Fax. +47 55 19 79 91

I redaksjonen:

Kjell Skajaa kjell.skajaa@casio.no
Tor Andersen tora1@online.no
Bjørn L. Bjørneng bbjornen@bbnett.no